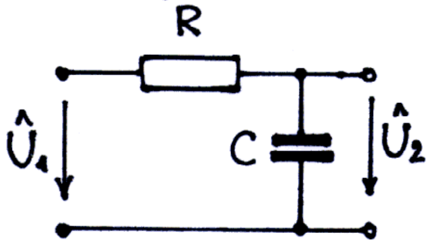
cvičení II.: Frekvenční charakteristiky

Teorie: skriptum Základy teorie elektrických obvodů I.
kap. 7.9 (str. 195)

Příklady:

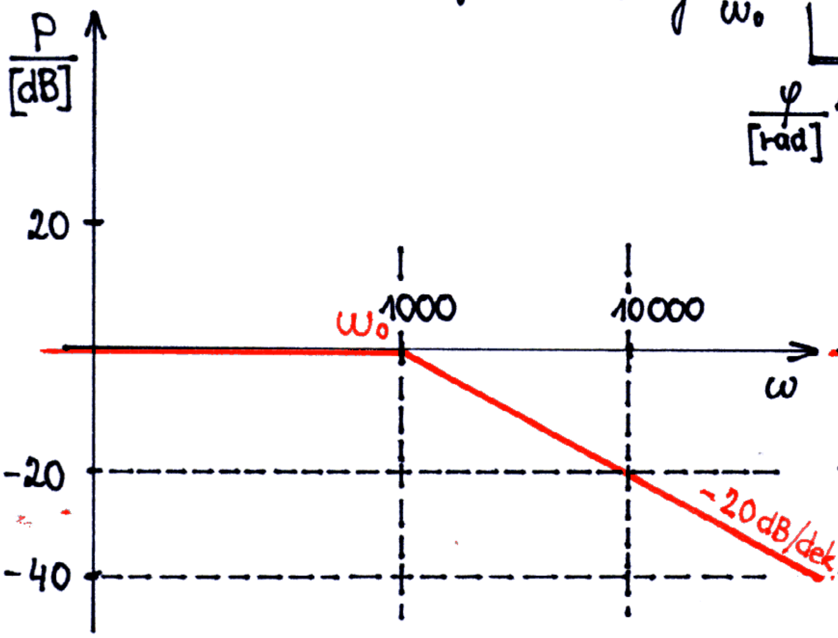
① Integrační RC článek:

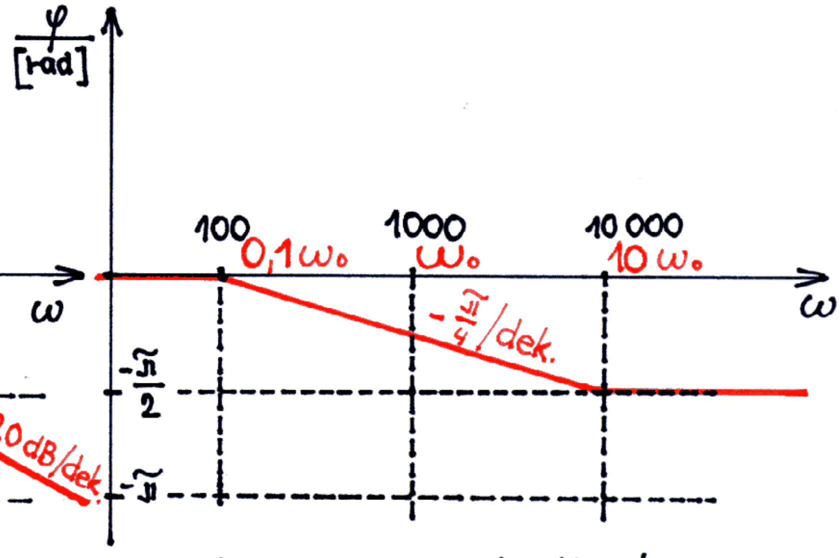


$R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,\mu F$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \boxed{\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{1000}}}$$

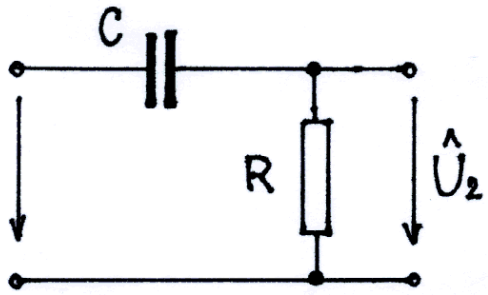
τ … má rozměr $[s]$; $\tau = \frac{1}{\omega_0}$





Integrační RC článek pracuje jako dolní propust, neboť nám potlačuje vysoké a propouští nízké kmitočty.

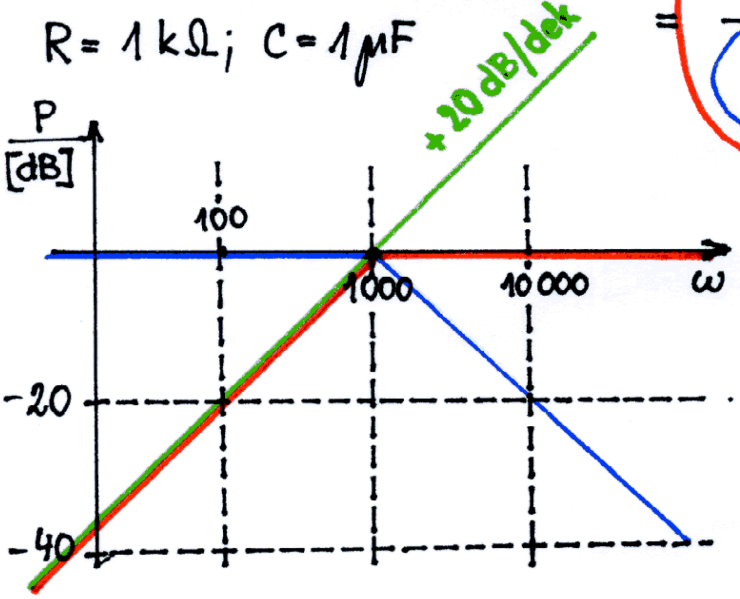
② Derivační RC článek:

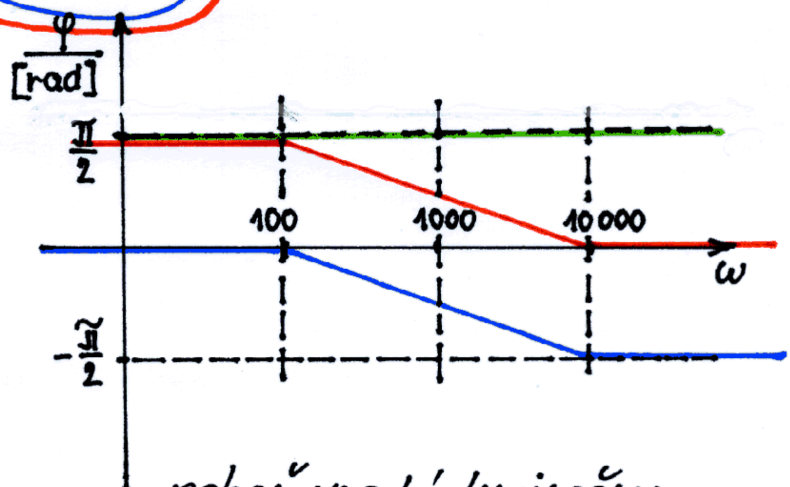


$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R}{1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} =$$

$$= \frac{1 \cdot j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \; ; \quad \omega_0 = \frac{1}{CR} = 1000\ s$$

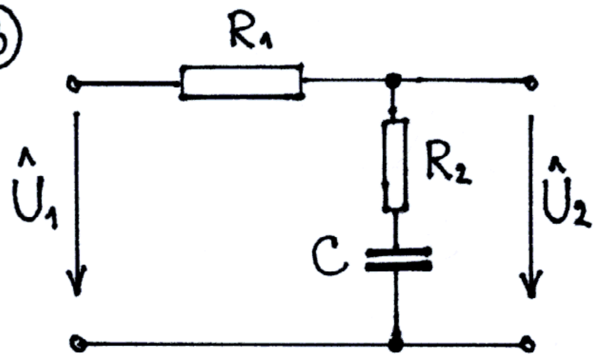
$R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,\mu F$





Obvod se nám chová jako horní propust, neboť vysoké kmitočty propouští a nízké kmitočty potlačuje.

③

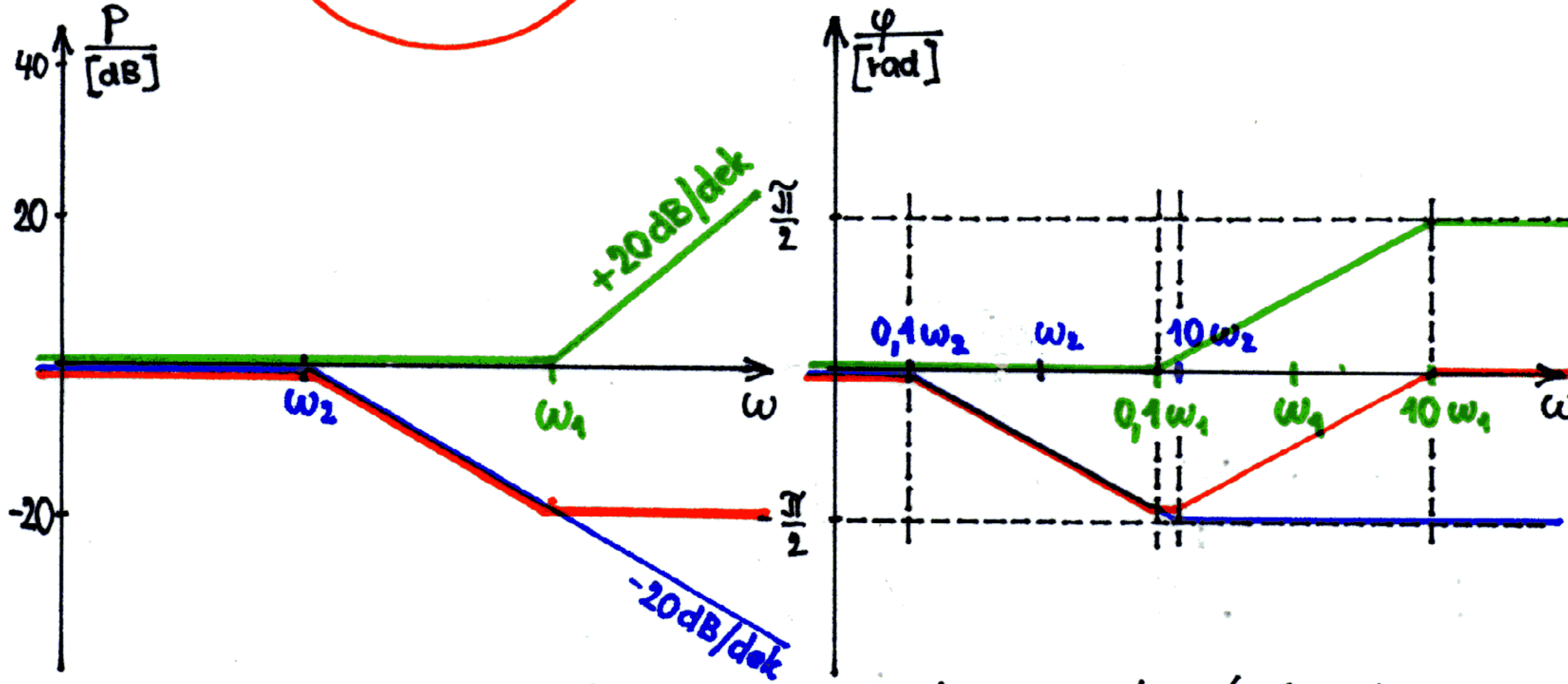


$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{\frac{j\omega R_2 C + 1}{j\omega C}}{\frac{j\omega C(R_1 + R_2) + 1}{j\omega C}} = \frac{1 + j\omega CR_2}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{CR_2} \; ; \quad \omega_2 = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \; ; \quad \omega_2 < \omega_1$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}; \quad \omega_2 < \omega_1$$



Jak určit vodorovnou úroveň modulové, resp. fázové charakteristiky?

a) modulová:

$$\hat{P}(\omega \to \infty) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{j\frac{\omega}{\omega_2}} = \left| \begin{array}{l} \text{pro velké } \omega \text{ lze} \\ \text{zanedbat jedničku,} \\ \text{tedy: } \frac{\omega}{\omega_1} \gg 1 \end{array} \right| = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{CR_2}{C(R_1+R_2)} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow$$

vodorovná úroveň je $20 \log \frac{R_2}{R_1+R_2}$ *

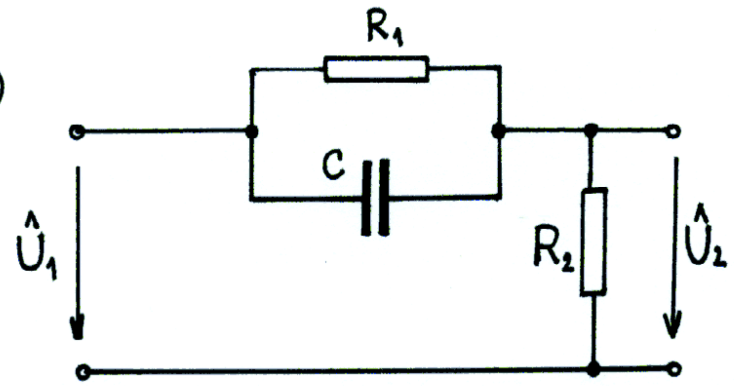
b) fázová:

charakteristika jmenovatele (modrá) má sklon $-\frac{\pi}{4}$/dek. Pro vodorovnou úroveň tedy platí:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}\left(\log 0{,}1\,\omega_1 - \log 0{,}1\,\omega_2\right)$$

* Pozn.: pro $\omega \to 0$ se kondenzátor chová jako rozpojení a tudíž $\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \Rightarrow \hat{P} = 1$ (resp. $P_{dB} = 0$); pro $\omega \to \infty$ se kondenzátor chová jako zkrat a přenos $\hat{P} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$. Pro oba limitní případy je přenos reálný, tudíž fáze nulová!

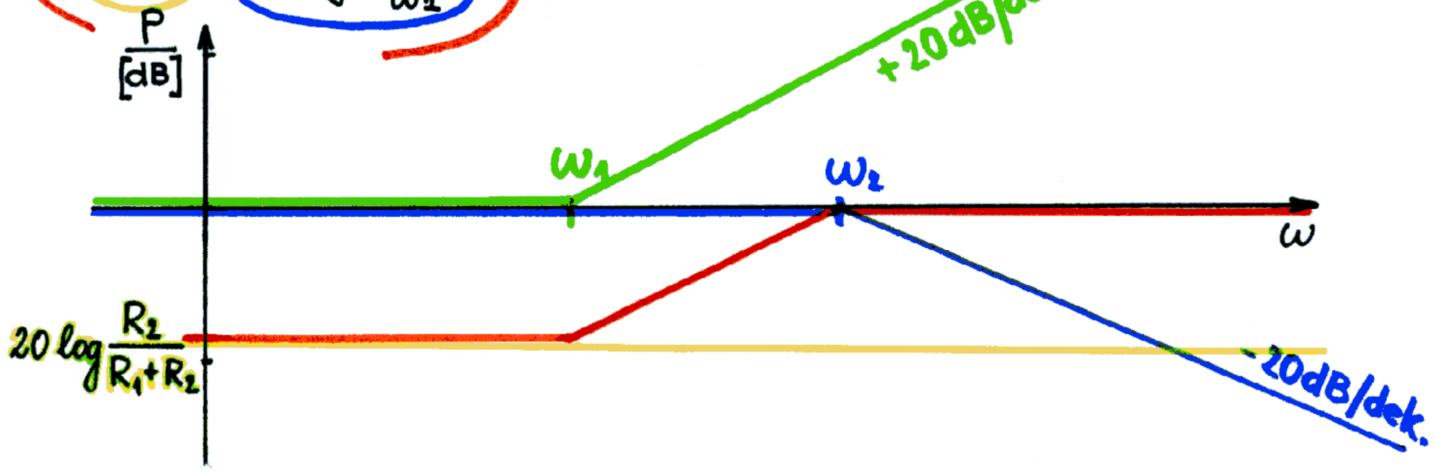
4

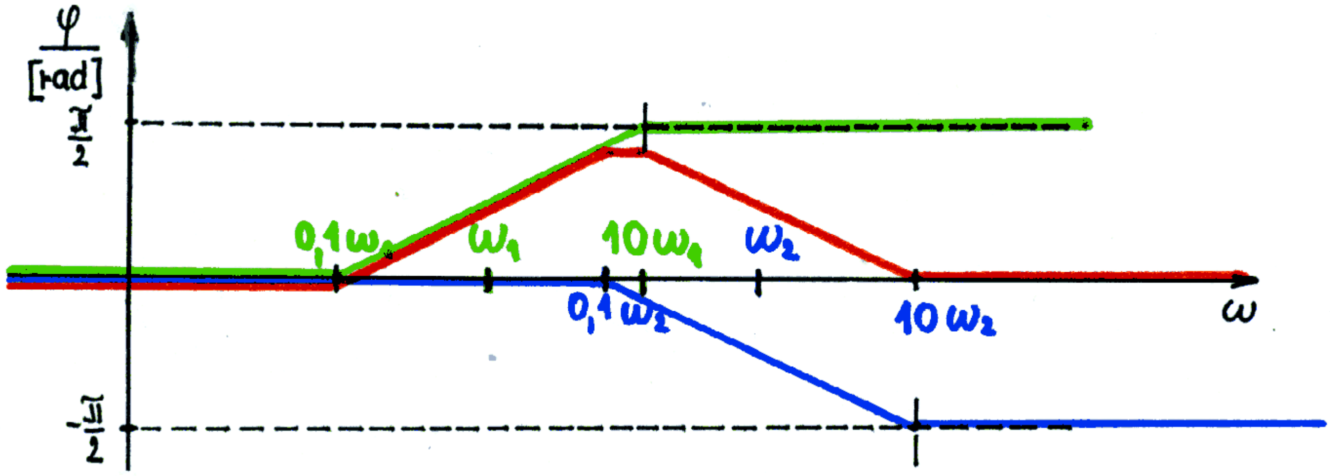


$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1}{1 + j\omega C R_1}} = \frac{R_2 (1 + j\omega C R_1)}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega C R_1}{1 + j\omega \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}} =$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}} \qquad \text{kde} \quad \omega_1 = \frac{1}{C R_1} \quad a \quad \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}$$





Vodorovná úroveň modulové charakteristiky:

$$\underline{P_{dB}} = 20 \log \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} = 20 \log \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\dfrac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}}{\dfrac{1}{C R_1}} = 20 \log 1 = \underline{0\,dB}$$

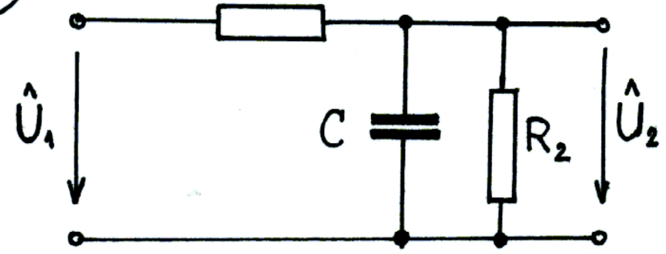
Správnost výsledku lze ověřit i spekulativně:

pro $\omega \to 0$ se kondenzátor chová jako rozpojení a tudíž přenos obvodu je dán děličem $\frac{R_2}{R_2 + R_1}$; pro $\omega \to \infty$ se kondenzátor chová jako zkrat a tudíž přenos je roven jedné (resp. $P_{dB} = 0$)

Vodorovná úroveň fázové charakteristiky je:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}\left(\log 0{,}1\,\omega_2 - \log 0{,}1\,\omega_1\right)$$

(5)

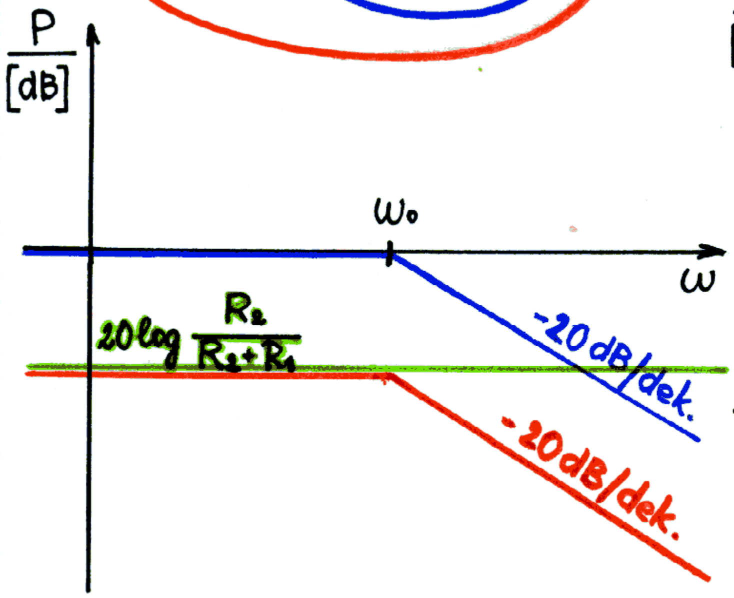


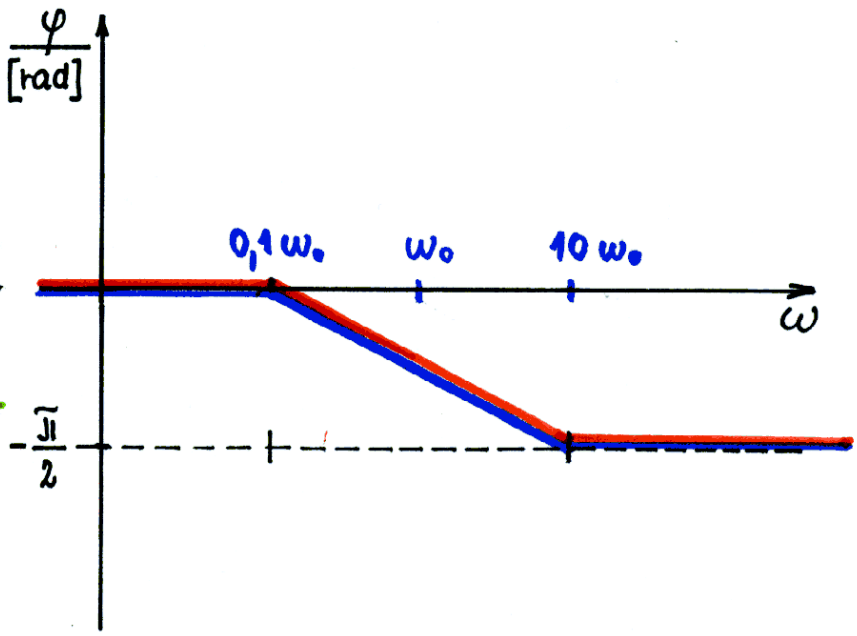
$$\hat{P}_{(j\omega)} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} + R_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{R_2}{1 + j\omega C R_2}}{R_1 + \dfrac{R_2}{1 + j\omega C R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot \dfrac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

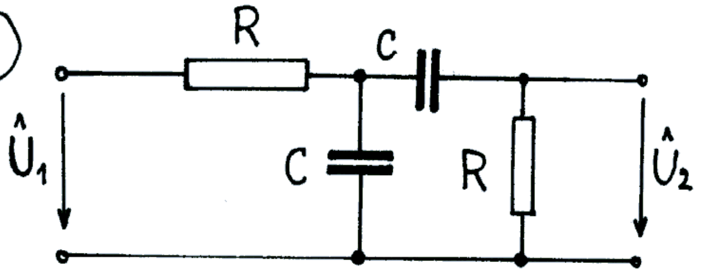
kde $\omega_0 = \dfrac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}$





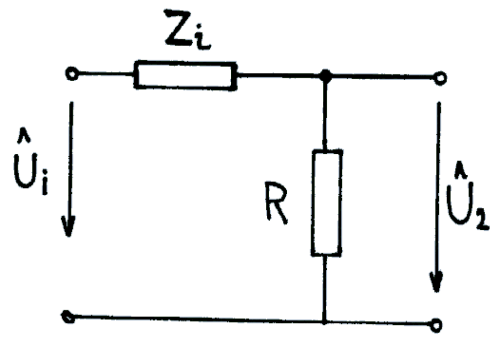
Pozn.: Pro $\omega \to 0$ se kondenzátor chová jako rozpojení, tudíž přenos obvodu je $\frac{R_2}{R_1+R_2}$; pro $\omega \to \infty$ kondenzátor postupně zkratuje výstup a přenos klesá k nule.

6



$R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,\mu F$

$\hat{P}_{(j\omega)} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$; pro výpočet přenosu použijeme zjednodušení obvodu pomocí Theveninova teorému.



$$\hat{Z}_i = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega C} = \boxed{\frac{1 + 2j\omega RC}{j\omega C(1 + j\omega RC)}}$$

$$\hat{U}_i = \hat{U}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \boxed{\hat{U}_1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_i \cdot \frac{R}{R + \hat{Z}_i} = \hat{U}_1 \cdot \frac{R}{R + \frac{1 + 2j\omega RC}{j\omega C(1 + j\omega RC)}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} =$$

$$= \frac{\hat{U}_1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{R}{\frac{j\omega RC(1 + j\omega RC) + 1 + 2j\omega RC}{j\omega C(1 + j\omega RC)}} = \frac{\hat{U}_1 \cdot j\omega RC}{(j\omega RC)^2 + 3j\omega RC + 1} \Bigg|_{\text{po dosazení}} =$$

$$= \frac{j\omega 10^{-3} \cdot \hat{U}_1}{(j\omega 10^{-3})^2 + 3j\omega 10^{-3} + 1} \Rightarrow \boxed{\hat{P}_{(j\omega)} = \frac{j\omega 10^{-3}}{(j\omega 10^{-3})^2 + 3j\omega 10^{-3} + 1}}$$

jmenovatel dále upravíme:

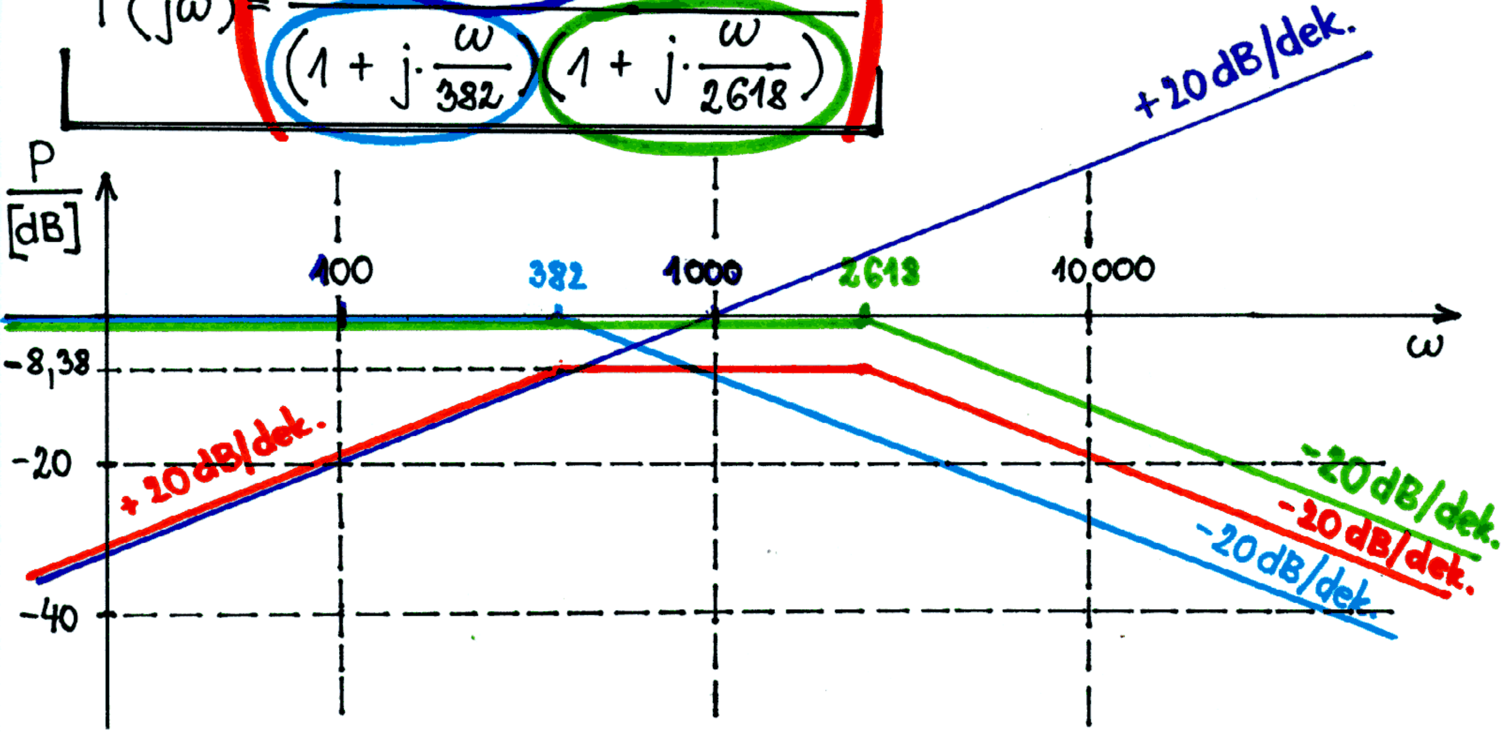
$$\hat{N}(j\omega) = (j\omega 10^{-3})^2 + 3\cdot j\omega 10^{-3} + 1 = 10^{-6}\left[(j\omega)^2 + 3\cdot 10^{3} j\omega + 10^{6}\right] =$$

$$= 1\cdot 10^{-6}\left[(j\omega + 382)(j\omega + 2618)\right] = 10^{-6}\cdot 382\cdot 2618\left(1 + \frac{j\omega}{382}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2618}\right) =$$

$$\doteq \left(1 + j\cdot\frac{\omega}{382}\right)\left(1 + j\cdot\frac{\omega}{2618}\right)$$

<u>Pro výsledný přenos potom platí:</u>

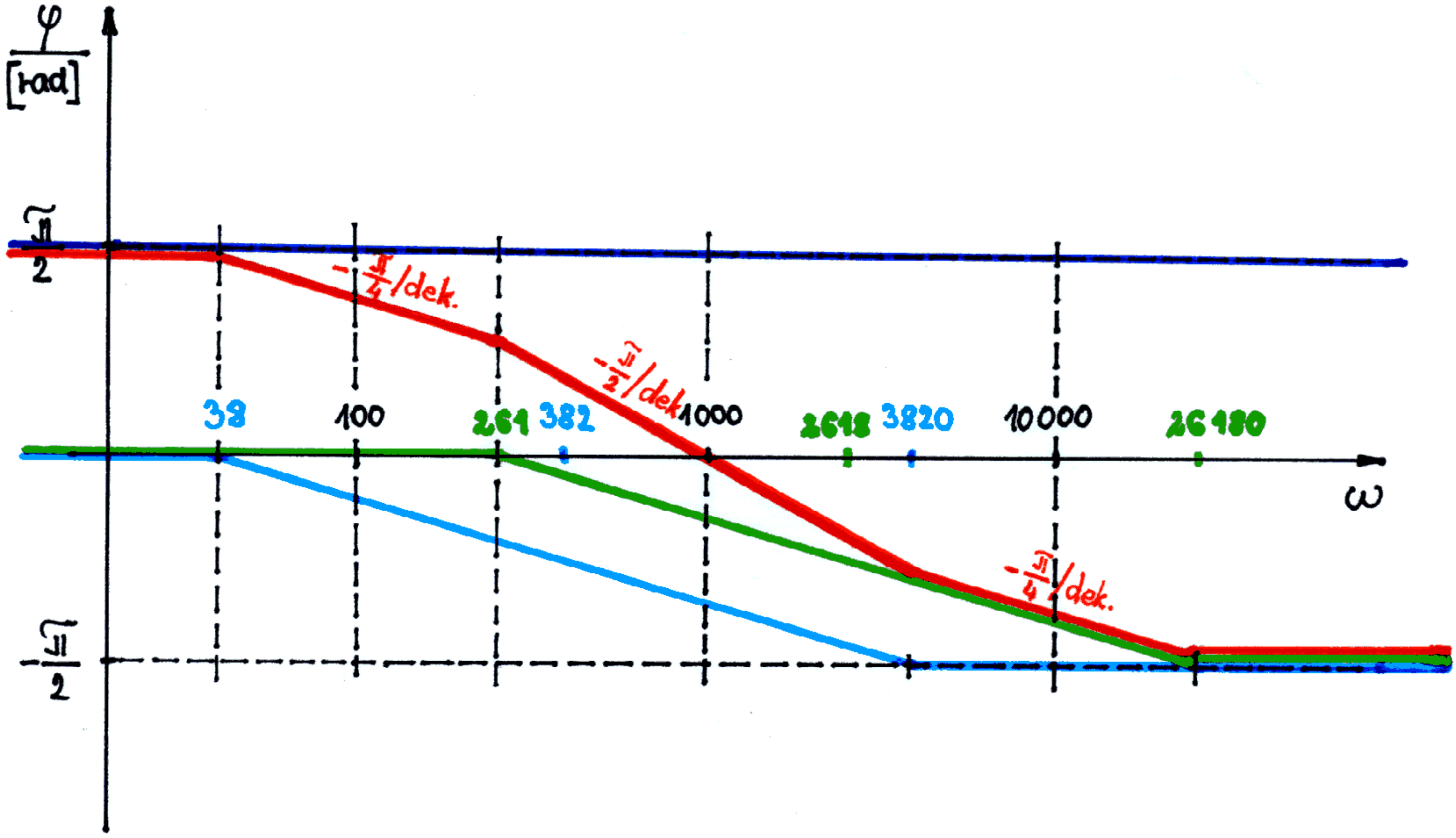
$$\hat{P}(j\omega) = \left(\frac{j\cdot\frac{\omega}{1000}}{\left(1 + j\cdot\frac{\omega}{382}\right)\left(1 + j\cdot\frac{\omega}{2618}\right)}\right)$$



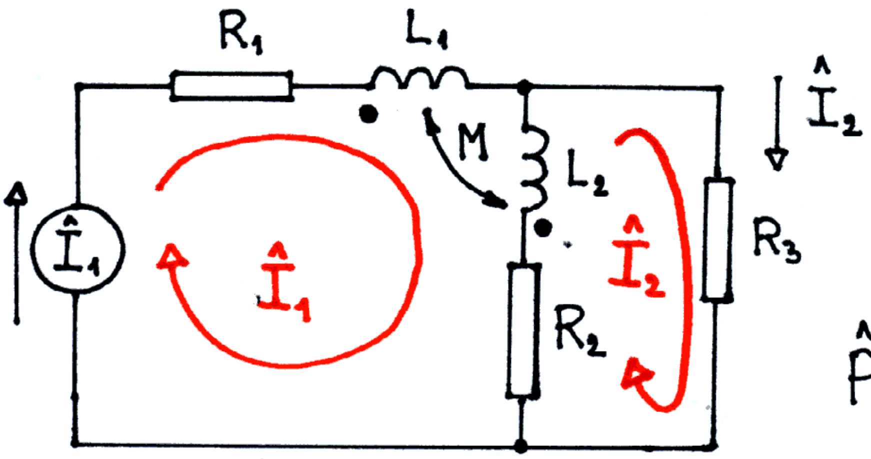
Vodorovná úroveň - tzv. kmitočtové plato:

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{j\cdot\frac{\omega}{1000}}{j\cdot\frac{\omega}{382}}\ ^{*} \quad \Rightarrow \underline{P_{dB}} = 20\log\frac{382}{1000} = \underline{-8{,}38\,dB}$$

* pro kmitočty $382 < \omega < 2618$ zanedbáme jedničku z první závorky a člen $j\cdot\frac{\omega}{2618}$ z druhé závorky.



7



$R_1 = 134{,}5\ \Omega$; $R_3 = 900\ \Omega$

$R_2 = 100\ \Omega$; $L_2 = 1\,H$

$L_1 = 0{,}839\,H$; $M = 0{,}5\,H$

$$\hat{P}_{(j\omega)} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1}$$

Sestavíme rovnici metodou smyčkových proudů pro smyčku 2:

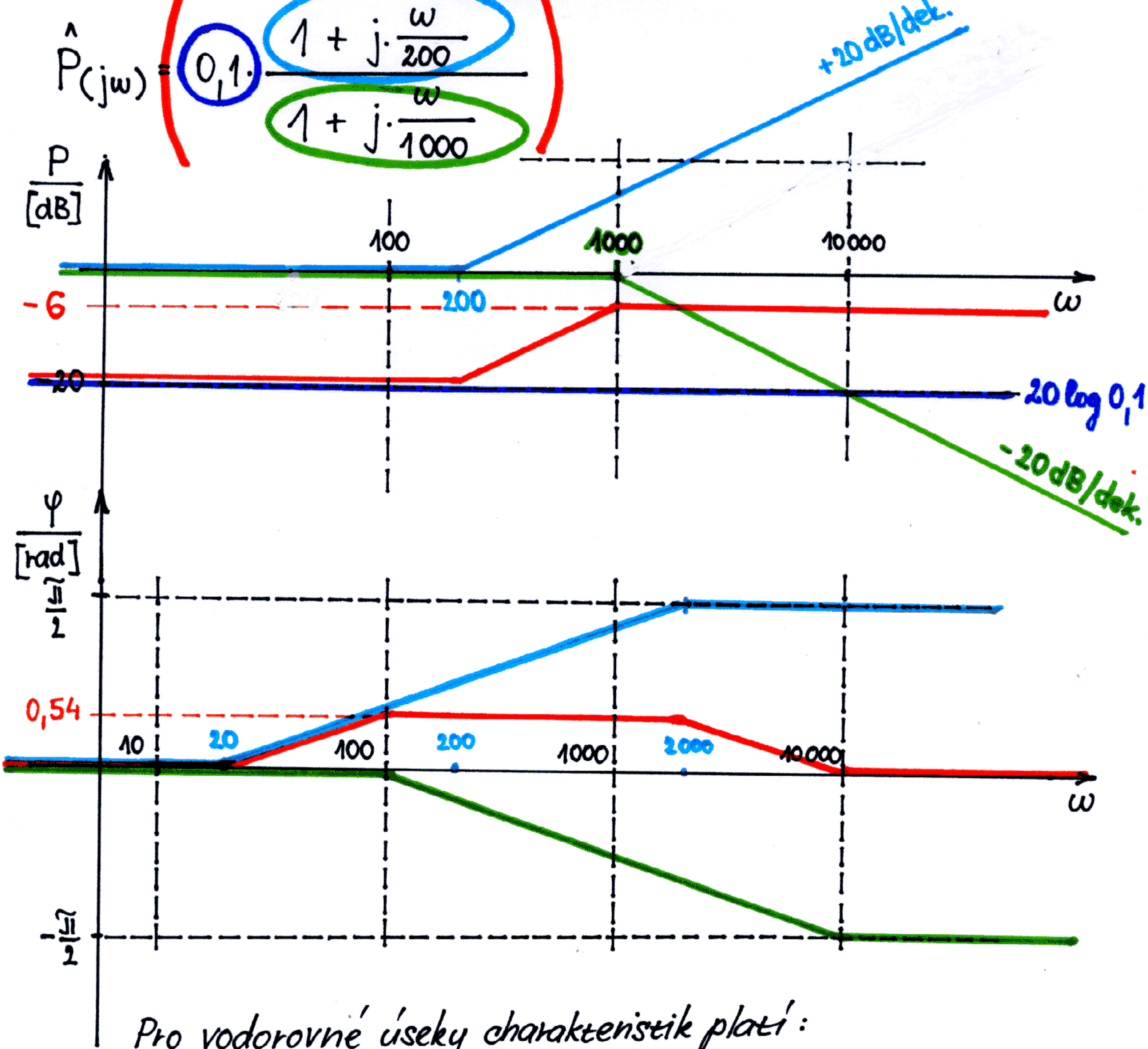
$$R_3\hat{I}_2 + R_2(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + j\omega L_2(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + j\omega M\hat{I}_1 = 0$$

$$\hat{I}_2(R_3 + R_2 + j\omega L_2) = \hat{I}_1(R_2 + j\omega L_2 - j\omega M)$$

$$\hat{P}_{(j\omega)} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \frac{R_2 + j\omega(L_2 - M)}{R_2 + R_3 + j\omega L_2} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot \frac{1 + j\omega\frac{L_2 - M}{R_2}}{1 + j\omega\frac{L_2}{R_2 + R_3}}$$

Po číselném dosazení:

$$\hat{P}(j\omega) = \left(0{,}1 \cdot \frac{1 + j\cdot\frac{\omega}{200}}{1 + j\cdot\frac{\omega}{1000}}\right)$$



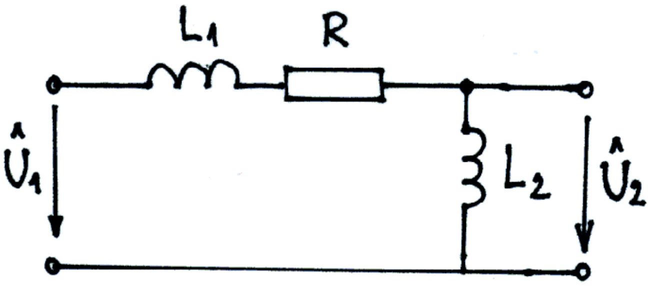
Pro vodorovné úseky charakteristik platí:

a) modulová: $P_{dB} = 20 \log 0{,}1 \cdot \frac{1000}{200} \doteq -6{,}02\,dB$

b) fázová: $\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot (\log 100 - \log 20) \doteq 0{,}54\ rad$

8

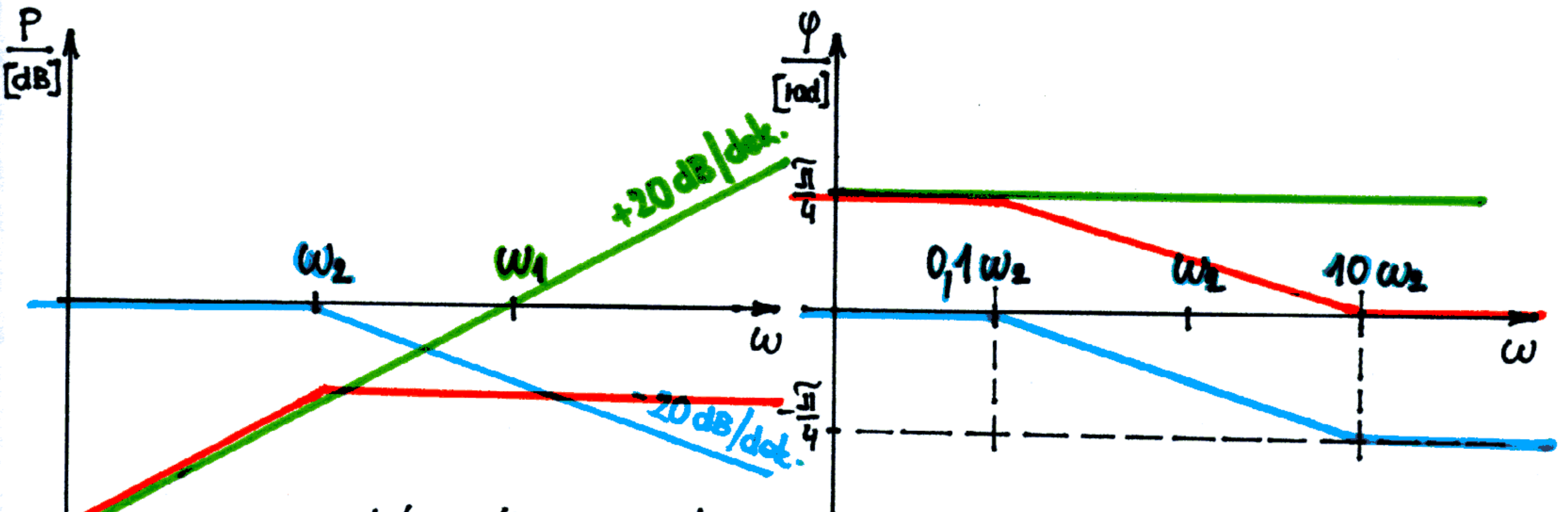
(Př. 5.95 ze cvičení)



$$\hat{P} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + j\omega L_1 + R} = \frac{j\omega L_2}{j\omega(L_1 + L_2) + R} = \left(\frac{j\omega \frac{L_2}{R}}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R}} \right)$$

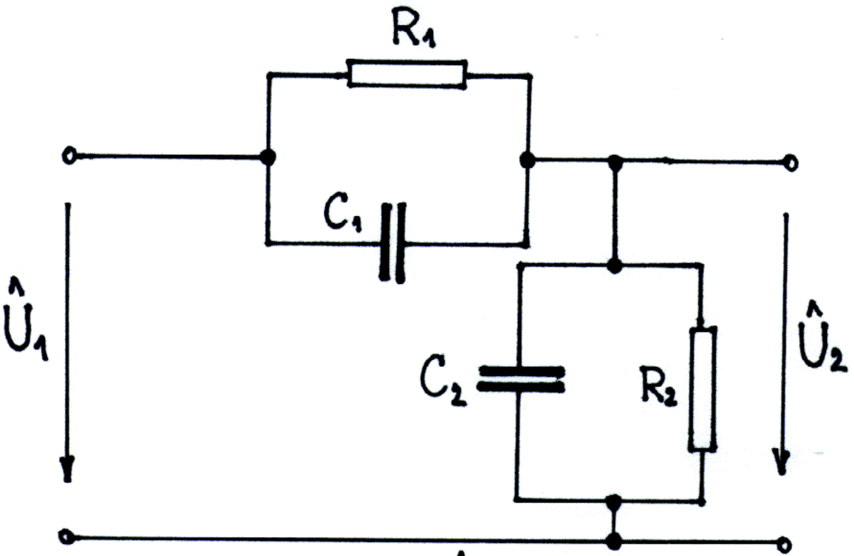
$$\omega_1 = \frac{R_1}{L_2} \; ; \quad \omega_2 = \frac{R}{L_1 + L_2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 < \omega_1$$



Vodorovná úroveň: $20 \log \frac{L_2}{L_1 + L_2}$

Obvod se chová jako horní propust, pro $\omega \to \infty$ je impedance cívek tak veliká, že odpor R lze nahradit zkratem a hovoříme pak o tzv. indukčním děliči.

9 (Př. 5.97 ze cvičení)



$R_1 = 5\,k\Omega$; $R_2 = 1\,k\Omega$;
$C_1 = 0{,}5\,\mu F$; $C_2 = 0{,}1\,\mu F$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}}{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} + \dfrac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}} = \frac{\dfrac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{\dfrac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} + \dfrac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}} =$$

$$= \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C_1)}{R_1 + R_2 + j\omega(R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}(C_1 + C_2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1 + j \cdot \frac{\omega}{400}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{2000}} \right)$$

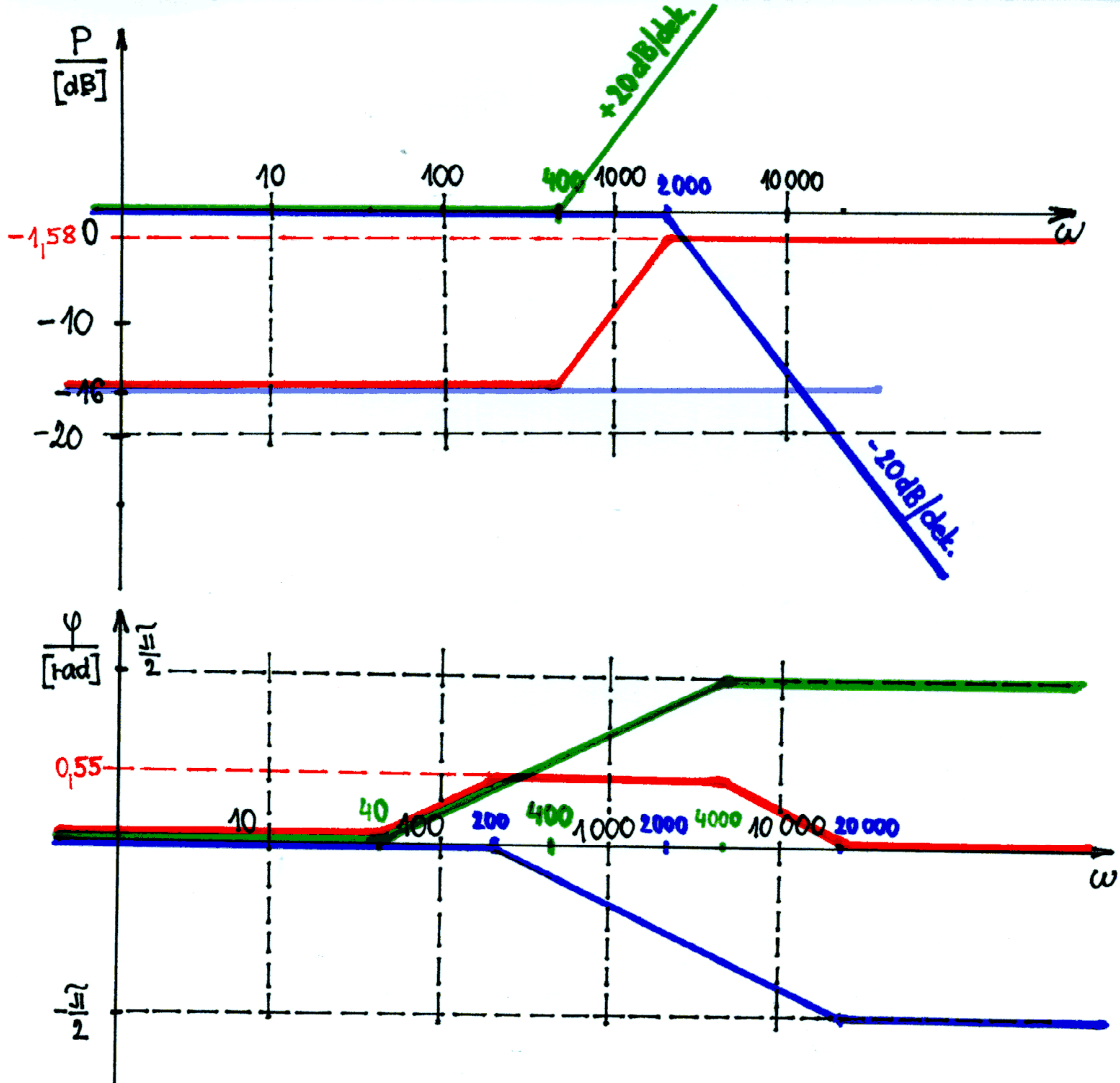
Pro vodorovnou úroveň charakteristik platí:

a) modulová:

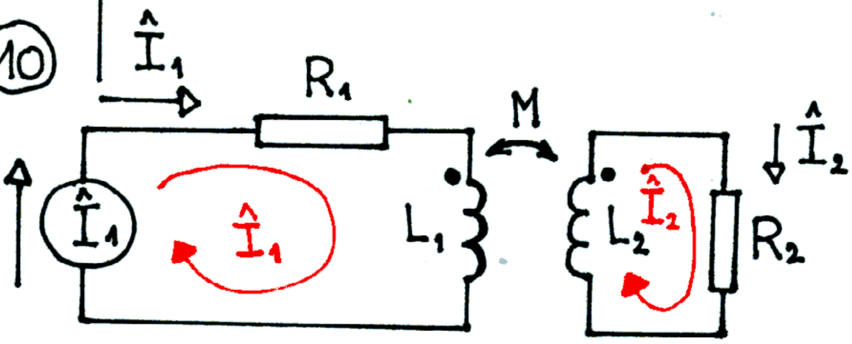
$$P_{dB} = 20 \log \frac{1}{6} \cdot \frac{2000}{400} \doteq \underline{-1{,}58\,dB}$$

b) fázová:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}(\log 200 - \log 40) = \underline{0{,}55\,rad}$$



(10)



$R_1 = R_2 = 100\,\Omega$

$L_1 = 2H;\ L_2 = 1H$

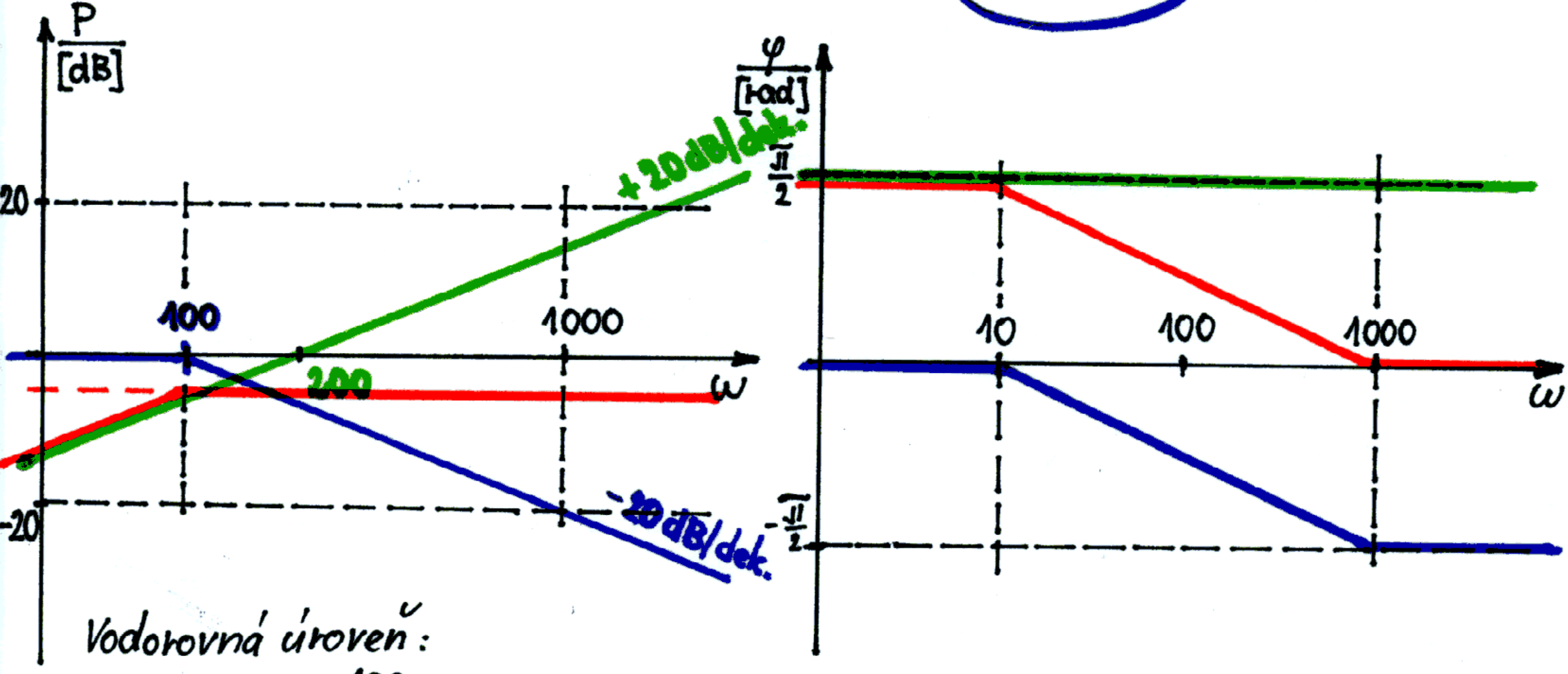
$M = 0{,}5\,H\ ;\ \hat{P}_{(j\omega)} = \dfrac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1}$

Sestavíme rovnici metodou smyčkových proudů:

$$R_2\hat{I}_2 + j\omega L_2\hat{I}_2 - j\omega M\hat{I}_1 = 0$$

$$\hat{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) = j\omega M \hat{I}_1$$

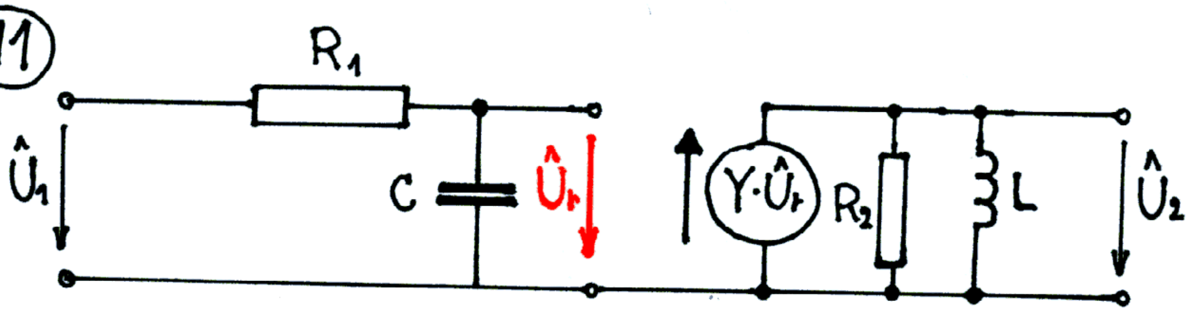
$$\hat{P}(j\omega) = \frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{j\omega \frac{M}{R_2}}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{200}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{100}}$$



Vodorovná úroveň:

$$P_{dB} = 20 \log \frac{100}{200} = -6{,}02\ dB$$

11



$R_1 = 1\,k\Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$C = 1\,\mu F$
$L = 0{,}14\,H$
$Y = 0{,}1\ A/V$

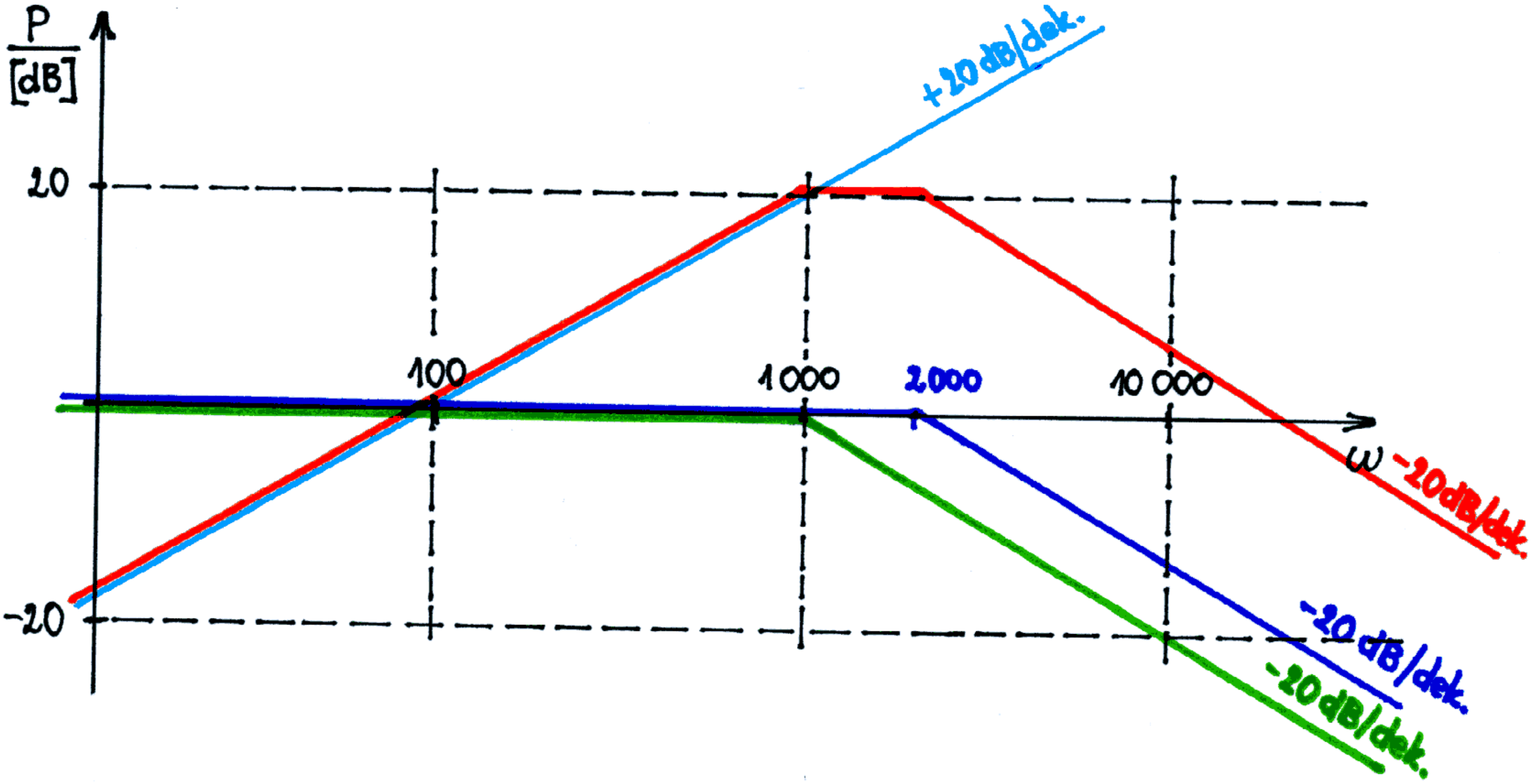
$$\hat{U}_2 = Y\hat{U}_r \cdot \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} \; ; \quad \text{kde} \quad \hat{U}_r = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \cdot \hat{U}_1 =$$

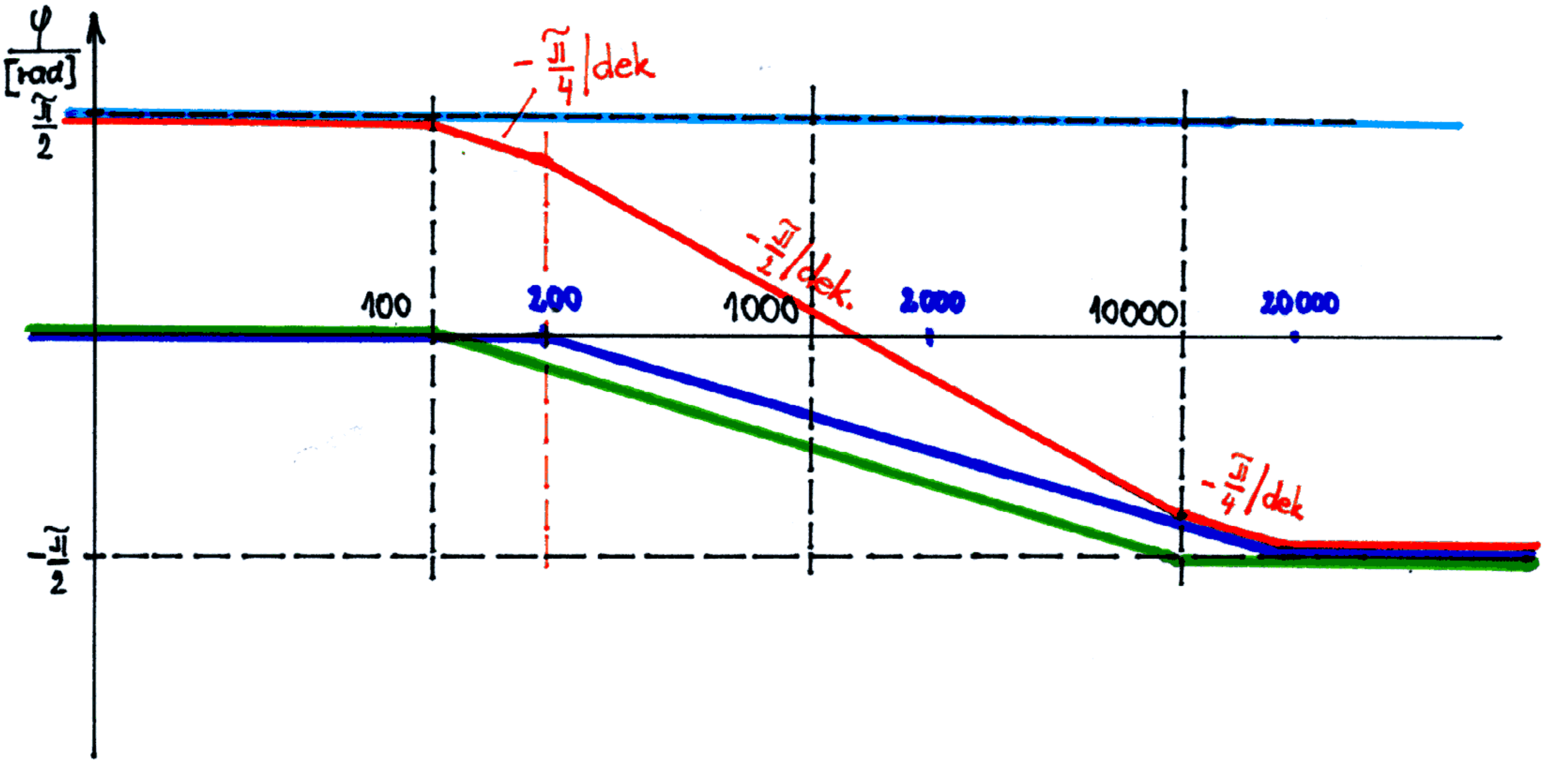
$$= \hat{U}_1 \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \; ; \quad \text{potom} \quad \hat{U}_2 = Y \cdot \hat{U}_1 \cdot \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} =$$

τ; Y má rozměr [S]

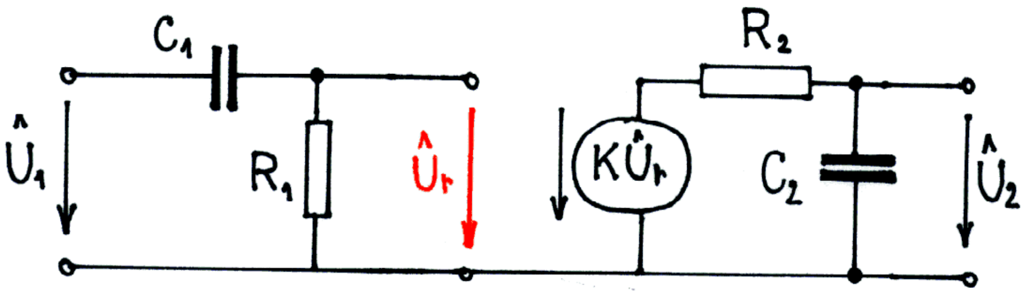
$$= Y\hat{U}_1 \cdot \frac{j\omega L}{1 + j\omega\frac{L}{R_2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} = \hat{U}_1 \cdot \frac{j\omega LY}{1 + j\omega\frac{L}{R_2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C}$$

$$\hat{P}(j\omega) = \frac{j\omega LY}{\left(1 + j\omega\frac{L}{R_2}\right)\left(1 + j\omega R_1 C\right)} = \left(\frac{j\cdot\frac{\omega}{100}}{\left(1 + j\cdot\frac{\omega}{1000}\right)\left(1 + j\cdot\frac{\omega}{2000}\right)}\right)$$





⑫ (příklad ze cvičení)



$R_1 = 1\,k\Omega$
$R_2 = 500\,\Omega$
$C_1 = 1\,\mu F$
$C_2 = 0{,}1\,\mu F$
$K = -1000\ [-]$

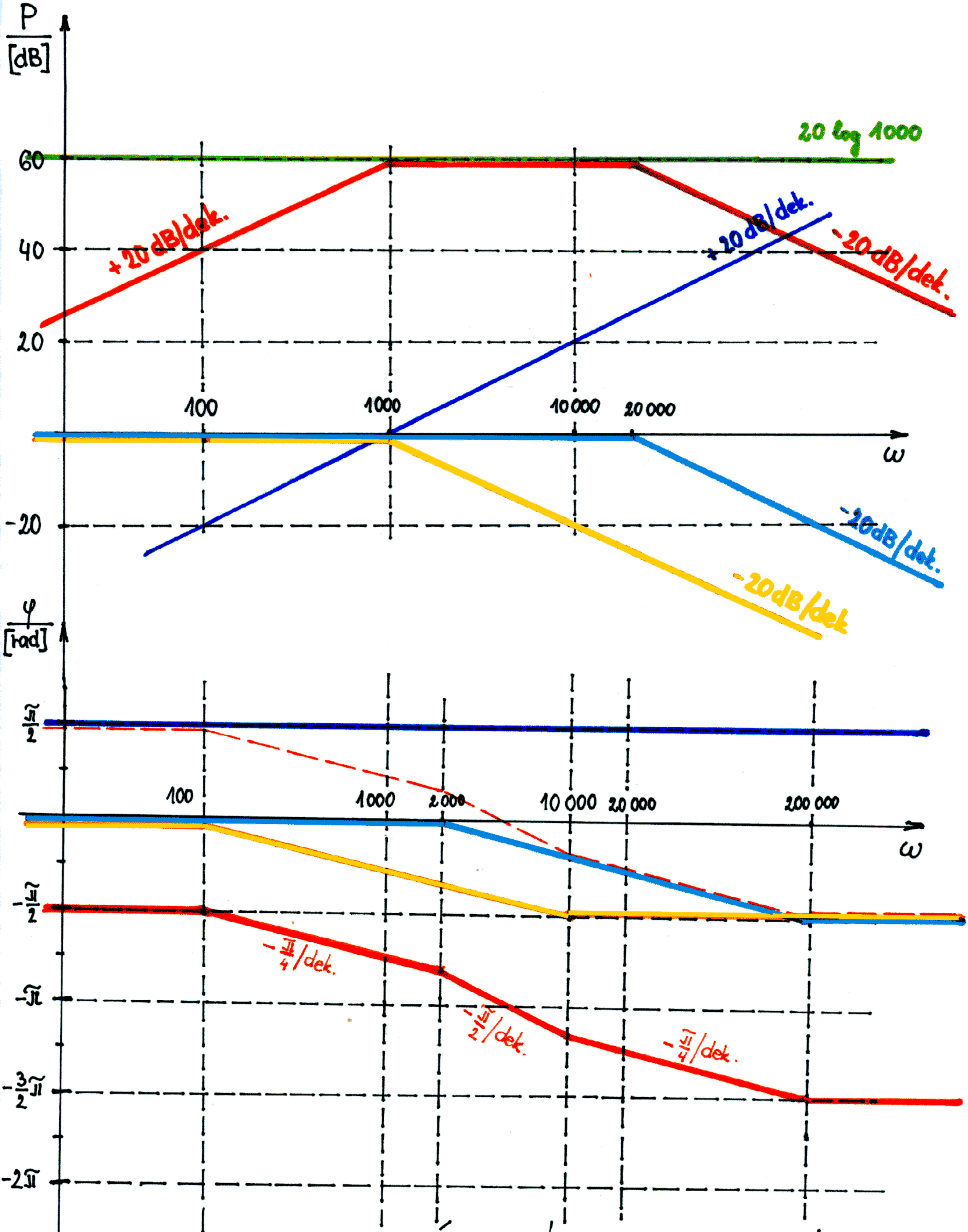
$\hat{P}(j\omega) = \dfrac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$; Konstanta $\underline{K}$ je bezrozměrná, jedná se o zdroj napětí řízený napětím.

$$\hat{U}_2 = K\hat{U}_r \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2} = K\hat{U}_r \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} ;$$

$$\hat{U}_r = \hat{U}_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \hat{U}_1 \cdot \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$\hat{P}(j\omega) = K \cdot \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} = \boxed{-1000 \cdot \frac{j \cdot \frac{\omega}{1000}}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{1000}\right)\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{20\,000}\right)}}$$

! Pozor na zápornou konstantu. Modulovou charakteristiku nám znaménko neovlivní (uvažujeme samozřejmě absolutní hodnotu konstanty!); fázovou nám samozřejmě neovlivní číselná hodnota konstanty, ale její znaménko. Zapamatujme si, že záporné znaménko konstanty posouvá fázovou charakteristiku o $\pm\pi$!



POSLEDNÍ STRÁNKA SOUBORU !